

諾貝爾與阿貝爾的光環下的涂林

作者：伽馬尼克（David Gamarnik）譯者：林武雄

兩項近期大獎背後的演算法故事

作者簡介

伽馬尼克是 MIT 史隆管理學院的作業研究和統計教授。他的研究領域包括離散機率、最佳化與演算法、量子計算、統計、機器學習和隨機過程。

2021 年諾貝爾物理學獎授予帕里西（Giorgio Parisi），以表彰他「發現了從原子到行星尺度的物理系統中無序與變動的相互作用」。2024 年阿貝爾數學獎授予塔拉格蘭（Michel Talagrand），以表彰他「對機率論和泛函分析的開創性貢獻，並在數學物理和統計學領域有著傑出的應用」。然而，大眾在這些獎項的描述中，很大程度上忽略了兩位學者對演算法和計算領域的深遠貢獻。最初這些思想是由帕里西及其合作者們憑藉著極其精確的物理直覺所提出，後來又被塔拉格蘭等人通過同樣卓越的數學方法證明，徹底改變了我們對涉及隨機性的最佳化問題的演算法思考方式。這不僅體現在某些最佳化問題存在快速演算法，也體現在我們始終未能找到針對其他一些最佳化問題的快速演算法的困境。

本文的目的在闡明這些發展，並解釋帕里西與塔拉格蘭所開創的理論如何精確界定哪些最佳化問題可採用快速演算法，哪些則不可行，同時進一步闡明此界定為何成立。

一、隨機結構的最佳化

帕里西和塔拉格蘭的研究致力於理解統計物理學中一種名為「自旋玻璃」（spin glass）的神秘物質，他們為理解演算法在解決涉及隨機性的最佳化問題時的成功與失敗機制提供了一種全新的方法。這項進展源自於對深層問題「物理」屬性的洞察，即解空間幾何形狀的理解。我們將用三個例子來說明這些概念，它們都符合以下形式的最佳化問題的通用框架：

$$\eta_{\text{OPT}} \triangleq \max_{\sigma \in \Theta} H(\sigma, \mathcal{R}). \quad \textcircled{1}$$

這裡， H 是有待最大化的函數，我們稱之為「漢米爾頓量」（Hamiltonian），其原因稍後解釋； Θ 是可能解的空間； $\mathcal{R}$ 是描述隨機性來源的隨機變數。我們的三個例子都表現出持續的計算與最佳化之間的差距，即最佳值 η_{OPT} 與已知高效演算法能夠計算出的最佳保證值之間的差距——其中，「高效」在計算複雜性（computational complexity）理論的術語中意指「多項式時間」（polynomial-time）。

例 I. 隨機圖中的最大團和獨立集。

我們三個例子中的第一個，是尋找稠密（dense）艾狄胥／雷尼圖（Erdős-Rényi graph）中最大團（clique）的問題，以及相關問題——尋找稀疏（sparse）艾狄胥／雷尼圖中最大獨立集（independent set）的問題。

想像一個有 n 名會員的俱樂部，其中任意兩名會員成為朋友或非朋友的機率皆為 $1/2$ ，且所有 $\binom{n}{2}$ 對會員組合間的機率相互獨立。那麼，會員間相互結為朋友的最大群體規模為何？這個數值稱為圖的「團數」，該圖的節點代表會員，邊則對應為朋友對。這個隨機結交友誼的俱樂部只是對一種隨機圖模型「艾狄胥／雷尼圖」的通俗描述，這模型記為 $\mathbb{G}(n, 1/2)$ 。艾狄胥（Paul Erdős）於 1948 年提出此模型，作為研究極值組合學領域問題的極有效工具。關於估計艾狄胥／雷尼圖最大團大小的問題，在 1970 年代得到成功解決，並有一個非常精

確的答案：當 $n \rightarrow \infty$ 時，在高機率下（即機率趨近 1，記作「whp」）團數為 $2(1 + o(1)) \log_2 n$ 。這裡 $o(1)$ 代表隨 $n \rightarrow \infty$ 趨近於零的收斂項。此即我們最佳化問題 $\textcircled{1}$ 的實例，其中 Θ 為圖形節點集 $[n] := \{1, \dots, n\}$ 的所有子集的集合； $\mathcal{R}$ 為隨機圖本身；若 σ 為 $\mathcal{R}$ 中的一個團，則 $H(\sigma, \mathcal{R})$ 為 σ 的基數量（cardinality），否則 $H = 0$ 。

漸近值 $2(1 + o(1)) \log_2 n$ 的直覺很簡單。設一個整數值 x ，設 $Z(x)$ 表示一個隨機變量，對應於 $[n]$ 中基數量為 x 且為團的子集的數量。根據期望的線性性質，該隨機變數的期望值為 $\binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{x}{2}}$ 。透過直接計算，當 x 漸近大於 $2 \log_2 n$ 時，該量收斂於零，這提供了上界的簡單證明。相應的下界則需更複雜的推導，涉及 $Z(x)$ 變異數的估計，這現在是許多隨機圖教科書的標準內容。

當將圖作為輸入提供給演算法設計者時，如何用演算法在最多多項式時間內高效的找到最大團？在這裡以及其他地方，我們遵循演算法效率的黃金標準，要求演算法的運行時間在輸入大小上最多以多項式方式增長。也就是說，我們要求演算法屬於 $\mathcal{P}$ ——運算時間在問題描述的大小上最多以多項式方式增長的演算法類別，在我們的例子中，這意味著它的運算時間最多以 n 的多項式速度增長。請注意，最大團問題可以透過檢查基數量為 $2(1 + o(1)) \log_2 n$ 的所有子集，在時間 $n^{O(\log n)}$ 內輕鬆解決；這個增長率是超多項式（superpolynomial）的，因此這種竭盡式搜尋（exhaustive search）演算法不屬於 $\mathcal{P}$ 。

我們的故事就從這裡開始。1976 年，現代演算法複雜性理論的奠基者之一的卡普（Richard

Karp） $\textcircled{1}$ 提出了一個非常簡單的演算法，用於計算一個團的大小保證（大致）達到半最佳，即 $(1 + o(1)) \log_2 n$ 。鑑於他的演算法並不特別「聰明」，卡普向學術界發起挑戰，要求開發出性能保證更優越的演算法，且須維持在 $\mathcal{P}$ 時間複雜性內。令人驚嘆的是，自該問題提出近五十年來，卡普的這個相當簡單的演算法一直沒有得到成功的改進，尤其是基於馬可夫鏈蒙地卡羅方法更新的演算法，正如傑魯姆（Mark Jerrum） $\textcircled{2}$ 在 1992 年所展示的那樣。這種持續的失敗進一步促使傑魯姆提出了隨機結構和高維度統計中研究最受關注的問題之一，即「臭名昭著的」隱藏團問題（Hidden Clique Problem）。因此，在 $\mathbb{G}(n, 1/2)$ 中尋找大團的問題表現出計算與最佳化之間的差距。

值得注意的是，雖然改進團問題的半最佳性在演算法上看似困難，但這種困難僅僅是證據上的，而非（至少目前）正式的。也就是說，我們沒有任何該問題具有條件演算法難度的證明，即便假設「 $\mathcal{N} \neq \mathcal{NP}$ 」猜想成立。這與最壞情況的設定形成了鮮明的對比。也就是說，考慮為任意圖尋找最大團的問題，特別是對於不一定依照 $\mathbb{G}(n, 1/2)$ 分佈所產生的圖。對於此版本問題，已知除非 $\mathcal{N} \neq \mathcal{NP}$ ，否則沒有任何多項式時間演算法能夠從最佳解產生任何乘法因子 $n^{1-\epsilon}$ 內的團（特別是遠大於因子 $1/2$ 的團）。我們看到，特別是在隨機

$\textcircled{1}$ 譯註：卡普是在柏克萊大學的資訊科學家和計算理論家，他以計算理論方面的研究聞名於世，並於 1985 年獲得涂林獎和 2008 年獲得京都獎，他也是美國國家工程院院士。

$\textcircled{2}$ 譯註：傑魯姆是在英國倫敦瑪麗皇后大學純數學教授，他是資訊科學家和計算理論家。