

約束映射與自由邊界

作者：帕菲加利 (Alessio Figalli)、格拉 (André Guerra)、金成漢 (Sunghan Kim) 與沙格利安 (Henrik Shahgholian)
譯者：王夏聲

作者簡介

菲加利是一位義大利數學家，主要的研究領域是變分學和偏微分方程。因其最佳傳輸問題及其在偏微分方程、度量幾何與機率的應用工作貢獻而聞名，並因此於 2018 年獲頒費爾茲獎。他現在是蘇黎世聯邦理工學院 (ETH Zürich) 的講座教授。

格拉是一位葡萄牙數學家，主要的研究領域是變分學和偏微分方程。他現在是蘇黎世聯邦理工學院理論研究所的初級研究員，指導教授是菲加利。

金成漢是一位韓國數學家，現在是瑞典烏普撒拉大學 (Uppsala University) 的博士後，主要的研究領域是偏微分方程。

沙格利安是瑞典皇家理工學院 (KTH Royal Institute of Technology) 的數學教授，他的研究主要集中在非線性偏微分方程的分析，特別著重於自由邊界問題及其正則性理論。

自由邊界問題簡史

自由邊界問題 (free boundary problem) 在偏微分方程的各個領域中隨處可見。當變量在特定數值處發生驟變時，此類問題便會產生。相關實例不勝枚舉，例如材料凝固過程中的固／液界面、金融工具（如美式期權）的行權區 (exercise region) 與持續區 (continuation region) 邊界，以及應力超過臨界值 (critical threshold) 時彈性行為轉為塑性行為的轉換現象。這些應用常導致自由邊界問題被稱為相變問題 (phase transition problem)。

傳統上，自由邊界的數學建模起源於對受約束 (constraint) 最小曲面的研究，可以追溯到熱爾崗 (Joseph Gergonne) [Ger16]，他於 1816 年提出了以下問題：

Couper un cube en deux parties, de telle manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses de deux faces opposées, et que l'aire de cette section, terminée à la surface du cube, soit un minimum.

簡而言之，這句話的意思是：「將一個立方體切成

兩部分，使得截面終止於兩個相對面的對角線上，並最小化該截面的面積。」這個問題懸而未決近半世紀，直到 1872 年史瓦茲 (Hermann Schwarz) 開始研究它；參見 [Sch72]。

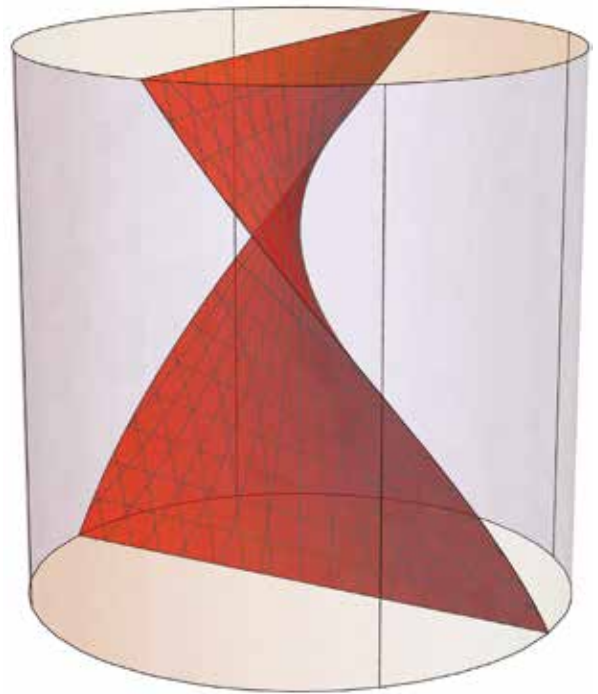


圖 1. 當我們對半切割的不是立方體，而是圓柱時，熱爾崗問題的解。

作者鳴謝：菲加利的研究部分獲得歐洲研究理事會 (ERC) 資助，該資助依據編號 721675 之〈偏微分方程中的正則性與穩定性〉 (Regularity and Stability in Partial Differential Equations) 研究協議。格拉獲得羅斯勒 (Max Rössler) 博士、沃爾特·海夫納基金會 (Walter Haefner Foundation) 及蘇黎世聯邦理工學院基金會資助。金成漢獲維格基金會 (Verg Foundation) 研究經費支持。沙格利安獲瑞典研究理事會資助 (計畫編號：2021-03700)。